УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Цель работы – исследование устойчивости линейной САУ по ее математической модели. Анализ влияния отдельных параметров системы на ее устойчивость.

1 Краткие теоретические сведения

Основной динамической характеристикой автоматической системы является ее устойчивость.

Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода ее из этого состояния и прекращения влияния задающего или возмущающего воздействия.

В зависимости от характера переходного процесса линеаризованной системы различают три основных случая поведения системы после возмущающего воздействия:

1) система не может восстановить равновесного состояния, значение управляемой переменной все больше отклоняется от заданного; такой процесс называется ***расходящимся,*** а система — ***неустойчивой;***

2*)* система возвращается к равновесному состоянию, значение управляемой переменной отличается от заданного на величину статической погрешности системы; такой переходный процесс будет ***сходящимся,*** а система — ***устойчивой;***

3) система характеризуется установившимся периодическим движением; такой процесс называется ***незатухающим колебательным,*** а система будет ***находиться на границе асимптотической устойчивости.***

Методы определения устойчивости

Устойчивость линейных систем не зависит от величины возмущения; система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчивой и при больших возмущениях. Поэтому для суждения об устойчивости

линейных систем достаточно исследовать и определить устойчивость «в малом», т. е. найти устойчивость по уравнениям в форме приращений. При этом судить об устойчивости можно по корням характеристического уравнения замкнутой системы.

Если динамика системы точно описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то устойчивость «в малом» обеспечивает неограниченную устойчивость системы. Нелинейные системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, могут быть устойчивыми при малых возмущениях и неустойчивыми при больших.

Процессы, происходящие в большей части реальных систем, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые для упрощения исследования могут быть линеаризованы. Тогда исследование реальной (действительной) системы заменится исследованием линеаризованной системы.

Правильность суждения об устойчивости реальной системы «в малом» по линеаризованным уравнениям доказана А. М. Ляпуновым.

При некоторых общих условиях справедливо следующее (первая теорема А. М. Ляпунова):

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система устойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут изменить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система неустойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут придать системе устойчивость.

3. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой корень или пару чисто мнимых сопряженных корней, то поведение действительной системы не может определяться ее линеаризованным уравнением. В этом случае отброшенные при линеаризации уравнения члены второй и высшей степеней отклонения переменных коренным образом изменяют описание динамического процесса реальной системы.

Аналитическая формулировка условия устойчивости сводится к тому, что возникшая в результате нарушения равновесия абсолютная величина отклонения управляемой переменной от заданного значения по истечении достаточно длительного промежутка времени должна стать меньше некоторого заранее заданного значения $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\lim_{t\to\infty}|\Delta x(t)|\le\varepsilon. \qquad (1)$$

Для астатической системы ошибка регулирования равна нулю, поэтому $\varepsilon=0$. При аналитическом исследовании динамических свойств автоматической системы надо составить для нее дифференциальное уравнение и проинтегрировать его. Это означает, что будет найден закон изменения интересующей нас переменной во времени, согласно которому можно сделать заключение о характере переходного процесса (устойчивый или неустойчивый).

Для решения указанной задачи необходимо найти свободное движение системы, которое описывается однородным дифференциальным уравнением:

$$a_n\frac{d^n x_{св}(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_{св}(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx_{св}(t)}{dt}+a_0 x_{св}(t)=0, \qquad (2)$$

где a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные коэффициенты, определяемые параметрами системы;

$x_{св}(t)$ — свободное движение системы, определяющее динамическую ошибку.

На основании дифференциального уравнения можно записать характеристическое уравнение системы:

$$a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0=0. \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение определяет корни, характеризующие свободное движение. Известно, что при отрицательных вещественных корнях составляющая свободного движения при $t\to\infty$ монотонно убывает до нуля, как показано на рисунке 1, а. Для пары комплексных корней с отрицательной вещественной частью составляющая свободного движения при $t\to\infty$ также убывает до нуля по закону затухающих колебаний (рисунок 1, б).

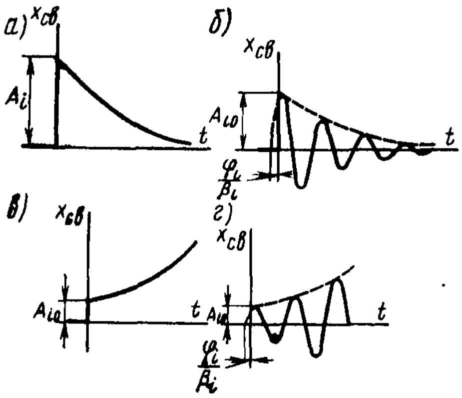

Рисунок 1 Переходные процессы при различных корнях характеристического уравнения

Аналитические выражения составляющих свободного движения имеют вид:

$$x_i(t)=A_i e^{p_i t}=A_i e^{\alpha_i t},$$
$$x_j(t)=A_j e^{p_j t}=A_j e^{\alpha_j t}\sin(\omega_j t+\varphi_j), \qquad (4)$$

где A_i, A_j — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

$p_{i,j}$ — корни характеристического уравнения;

$\alpha_{i,j}$ — вещественная часть корня (интенсивность затухания колебаний);

ω — мнимая часть корня (частота собственных колебаний);

φ_j — начальная фаза.

Система будет устойчивой при отрицательных корнях и отрицательных вещественных частях корней. В случае положительного вещественного корня составляющая свободного движения при $t \to \infty$ будет неограниченно возрастать (рисунок 1, в). Для пары комплексных корней с положительной вещественной частью составляющая свободного движения при $t \to \infty$ также будет возрастать по закону расходящихся колебаний (рисунок 1, г).

Если среди корней характеристического уравнения будет хотя бы одна пара чисто мнимых, то появится составляющая свободного движения в виде незатухающего колебательного процесса; система будет находиться на границе устойчивости и неустойчивости.

Таким образом, для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения замкнутой системы D(p) лежали слева от мнимой оси плоскости корней (рисунок 2).

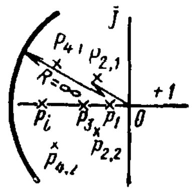

Рисунок 2 Расположение корней на комплексной плоскости

Значения коэффициентов характеристического уравнения, при которых по крайней мере одна пара комплексных корней находится на мнимой оси, а все остальные корни расположены в левой полуплоскости, определяют границу устойчивости. Граница устойчивости делит совокупность значений коэффициентов характеристического уравнения на две области: одна соответствует устойчивости системы, другая — неустойчивости.

Анализируя коэффициенты уравнения, можно установить, что они зависят только от постоянных времени и коэффициентов усиления звеньев системы.

Возникновению неустойчивости, как правило, способствует увеличение коэффициента усиления системы. В некоторых частных случаях уменьшение этого коэффициента может привести к нарушению устойчивости. Такие системы называются ***условно устойчивыми.***

Для суждения об устойчивости структурно устойчивых линейных систем надо определить расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. При этом можно не вычислять корни характеристического уравнения, надо лишь выяснить, все ли корни расположены слева от мнимой оси.

Обычно встречаются две постановки этой задачи:

1) можно считать, что заданы все параметры системы, и необходимо определить, устойчива ли система при этих значениях параметров (задача анализа);

2) необходимо определить значения некоторых параметров (при заданных остальных), при которых система устойчива (задача синтеза).

Математическая формулировка условий, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения или какие-либо функции этих коэффициентов, чтобы система была устойчивой, называется ***критерием устойчивости***. Критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные; они позволяют выяснить, все ли корни характеристического уравнения замкнутой системы находятся в левой полуплоскости без решения этого уравнения.

Необходимым условием устойчивости линейной системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения этой системы.

Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (5)$$

Это уравнение можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни:

$$a_n (p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n) = 0. \qquad (6)$$

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательными, то все множители будут положительными:

$$a_n (p+|\alpha_1|)(p+|\alpha_2|)\ldots(p+|\alpha_n|) = 0, \qquad (7)$$

где $p_1=-|\alpha_1|$, $p_2=-|\alpha_2|$, ..., $p_n=-|\alpha_n|$ – значения корней.

Производя перемножения в (7), получим уравнение (5), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами уравнения (7), т. е. будут положительными; нигде не могут получиться отрицательные числа и нули.

Аналогичное явление можно установить, если имеются комплексные корни с отрицательной вещественной частью:

$$a_n (p+|\alpha_1|)(p+|\alpha_2|+j\omega_2)(p+|\alpha_2|-j\omega_2)\ldots(p+|\alpha_n|) = 0, \qquad (8)$$

или

$$a_n (p+|\alpha_1|)[(p+|\alpha_2|^2+\omega^2{}_2]\ldots(p+|\alpha_n|) = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (8) также приводится к виду уравнения (5) с положительными коэффициентами. Для того чтобы получить отрицательные вещественные части корней, необходимо условие положительности всех коэффициентов уравнения.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Критерий, предложенный немецким математиком А. Гурвицем в 1895 г. формируется следующим образом: **чтобы все корни характеристического уравнения n-й степени $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ все n определителей Гурвица были больше нуля.**

При составлении определителей Гурвица необходимо придерживаться следующих правил. Для уравнения **n**-й степени надо составить **n** определителей: последний (главный) определитель будет **n**-го порядка, предпоследний — **(n—1)**-го порядка и т. д.

Критерий устойчивости сводится к тому, что при $a_n > 0$ должны быть больше нуля все **n** определителей Гурвица, полученных из квадратной матрицы коэффициентов.

Главный определитель Δ_n (определитель **n**-го порядка) составляется следующим образом:

1) по главной диагонали выписываются коэффициенты уравнения в порядке убывания индексов, начиная с a_{n-1} и до последнего a_0 включительно:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

2) столбцы вверх от диагонали дополняются коэффициентами с убывающими индексами, а столбцы вниз от диагонали — коэффициентами с возрастающими индексами;

3) места недостающих коэффициентов заполняются нулями. Определитель более низкого порядка получается из определителя более высокого порядка вычеркиванием одного столбца справа и строки снизу.

Последний определитель включает в себя всю матрицу.

Но так как в последнем столбце матрицы все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель Гурвица выражается через предпоследний следующим образом:

$$\Delta_n = a_0\Delta_{n-1} > 0. \qquad (10)$$

Однако в устойчивой системе предпоследний определитель тоже должен быть положительным. Поэтому условие положительности последнего определителя сводится к условию $a_0>0$, т. е. к положительности свободного члена характеристического уравнения.

Условия нахождения системы на границе устойчивости можно получить, приравнивая нулю последний определитель: $\Delta_n=0$, при положительности всех остальных определителей. Как следует из (10), это условие распадается на два условия: $a_0=0$ и $\Delta_{n-1}=0$. Первое условие соответствует границе устойчивости первого типа (апериодическая граница устойчивости) и второе — границе устойчивости второго типа (колебательная граница устойчивости).

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерии устойчивости для системы первого, второго, третьего, четвертого и более высоких порядков.

Условия устойчивости для некоторых систем, характеристические уравнения которых могут быть представлены в виде (5) сведены в таблице 1.

Таблица 1 Значения определителей Δ_n

n	Значения определителей				Условия устойчивости
	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	
1	a_0	–	–	–	$a_i>0$
2	a_1	a_0a_1	–	–	$a_i>0$
3	a_2	$a_1a_2-a_0a_3$	$a_0\Delta_3$	–	$a_i>0$ $\Delta_2>0$
4	a_3	$a_2a_3-a_1a_4$	$a_1(a_2a_3-a_1a_4)-a_0a^2_3$	$a_0\Delta_3$	$a_i>0$ $\Delta_2>0$ $\Delta_3>0$
5	a_4	$a_3a_4-a_2a_5$	$a_2(a_3a_4-a_2a_5)+a_4(a_0a_5-a_1a_4)$	$(a_1a_2-a_0a_3)*(a_3a_4-a_2a_5)-(a_0a_5-a_1a_4)^2$	$a_i>0$ $\Delta_2>0$ $\Delta_4>0$

Пример 1

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{k_\omega}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}=\frac{b(p)}{c(p)}.$$

В разомкнутом состоянии система является нейтрально устойчивой (ее характеристическое уравнение **c(p)=0** имеет нулевой корень).

Необходимо с помощью критерия Гурвица определить условия, при которых система, замкнутая единичной отрицательной обратной связью, будет устойчивой.

Решение.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$d(p)=b(p)+c(p)=T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+k_\omega=a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости, согласно таблицы 1, при n=3:

$$\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3>0;$$

$$\Delta_2=(T_1+T_2)-k_\omega T_1T_2>0,$$

т. е. замкнутая система будет устойчивой, если

$$k_\omega<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2},$$

или

$$k_\omega<\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}.$$

Графически это условие показано на рисунке 3. Кривая **1** с уравнением $k_\omega=\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ называется **границей устойчивости**.

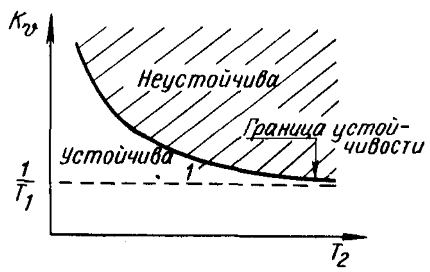

Рисунок 3 Область устойчивости в плоскости параметров

Пример 2

Задана передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=k\frac{1+\tau p}{p^2(1+Tp)}.$$

Определить условие устойчивости замкнутой системы.

Решение.

Для замкнутой системы с единичной обратной связью характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$d(p)=Tp^3+p^2+\tau p+1=a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0,$$

где $a_3=T$; $a_2=1$: $a_1=k\tau$; $a_0=k$.

Определитель Δ_2

$$\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3>0.$$

$$\Delta_2=k\tau-kT>0.$$

Условие устойчивости замкнутой системы: **$\tau > T$**, так как **$k > 0$** всегда.

Существенным недостатком критерия Гурвица является также то, что для уравнений высоких порядков в лучшем случае можно получить ответ о том, устойчива или неустойчива система автоматического регулирования. При этом **в случае неустойчивой системы критерий не дает ответа на то, каким образом надо изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой.** Это обстоятельство привело к поискам других критериев, которые были бы более удобными в инженерной практике.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Предложенный в 1938 г. А.В. Михайловым критерий позволяет судить об устойчивости системы по кривой, построенной на основании характеристического полинома замкнутой системы. В уравнении системы, замкнутой единичной обратной связью,

$$\Phi(p)=\frac{\dfrac{b_m(p)}{c_n(p)}}{1+\dfrac{b_m(p)}{c_n(p)}}=\frac{b_m(p)}{b_m(p)+c_n(p)}=\frac{b_m(p)}{d_n(p)}$$

характеристическим полиномом является полином $d_n(p)$

$$d_n(p)=b_m(p)+c_n(p).$$

Нормированный полином $D(p)$ имеет в общем случае вид:

$$D(p)=p^n+A_{n-1}p^{n-1}+...+A_1p+A_0. \qquad (11)$$

Как известно, этот полином можно разложить на множители:

$$D(p)=(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)...(p-p_n), \qquad (12)$$

где p_1, p_2,...,p_n — корни характеристического уравнения замкнутой системы:

$$p^n+A_{n-1}p^{n-1}+...+A_1p+A_0=0. \qquad (13)$$

Задача состоит в определении условий, при которых все корни характеристического уравнения $d_n(p)=0$ лежат слева от мнимой оси частотной плоскости.

На частотной плоскости каждый из корней p_i изображается либо точкой (рисунок 4, а), либо вектором, проведенным из начала координат к этой точке (рисунок 4, б).

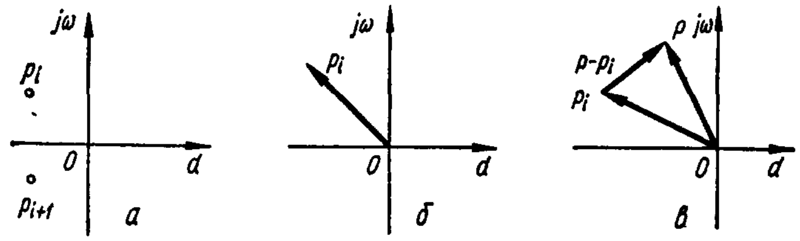

Рисунок 4 Изображение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости в определение вектора $p-p_i$:
а — точкой;
б — вектором;
в — определение вектора $(p-p_i)$

Текущая координата **p**, являющаяся комплексным числом $p=\alpha+j\omega$ геометрически также изображается вектором. Каждый множитель $(p-p_i)$ выражения (12) для $D(p)$ являющийся разностью двух векторов, представляет собой также вектор, начало которого находится в точке, определяющей корень p_i, а конец — в точке, соответствующей текущей координате **p** (рисунок 4, в).

Выражение (12) остается справедливым при любых значениях текущей координаты **p** и в частности при $p=j\omega$:

$$D(j\omega)=(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)(j\omega-p_3)...(j\omega-p_n). \qquad (14)$$

Концы элементарных векторов $(j\omega-p_i)$ в этом случае будут лежать на мнимой оси в точке $p=j\omega$, как изображено на рисунке 4, а, и с изменением ω будут перемещаться вдоль этой оси. Длина (модуль) и угол поворота каждого из векторов $(j\omega-p_i)$ при этом будут изменяться. Принято считать поворот вектора против часовой стрелки положительным. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор $(j\omega-p_i)$, начало которого (т. е. корень) лежит в левой плоскости, повернется на угол $+\pi$, а каждый вектор, начало которого находится в правой полуплоскости,— на $-\pi$ (рисунок 4, б).

Поскольку функция $D(j\omega)$ равна произведению элементарных векторов $(j\omega-p_i)$, то и сама эта функция представляет собой вектор. Модуль вектора $|D(j\omega)|$, называемого характеристическим, равен произведению модулей элементарных векторов т. е.:

$$|D(j\omega)|=|j\omega-p_1||j\omega-p_2||j\omega-p_3|...|j\omega-p_n|, \qquad (15)$$

а его аргумент — сумме аргументов этих векторов:

$$\arg D(j\omega)=\arg(j\omega-p_1)+\arg(j\omega-p_2)+...+\arg(j\omega-p_n). \qquad (16)$$

Результирующее изменение $\arg D(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ зависит от расположения корней на частотной плоскости. Если все **n** корней характеристического уравнения замкнутой системы находятся в левой полуплоскости, что соответствует устойчивой системе, то **$\arg D(j\omega)$** при изменении **ω** от **$-\infty$** до **$+\infty$** изменяется на **$+n\pi$**, т. е. вектор **$D(j\omega)$** повернется против часовой стрелки на угол **$n\pi$**.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения окажется в правой полуплоскости, что соответствует неустойчивой системе, то вектор **$D(j\omega)$** повернется на угол, меньший, чем **$n\pi$**, при изменении **ω** от **$-\infty$** до **$+\infty$**.

На практике нет необходимости изменять **ω** от **$-\infty$** до **$+\infty$**, а достаточно ограничиться изменением **ω** от **0** до **$+\infty$**.

Характеристический полином $d(p)$ не будет иметь корней в правой полуплоскости, если полное приращение фазы или аргумента $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ равно $n\frac{\pi}{2}$, где n — степень полинома $D(p)$.

Следовательно, система регулирования будет устойчива.

Если полное приращение аргумента **$D(j\omega)$** окажется меньше **$n\frac{\pi}{2}$**, то система неустойчива.

Если все коэффициенты **$D(p)$** заданы и задано определенное значение частоты **ω**, то величина **$D(\omega)$** изобразится на комплексной плоскости в виде точки с координатами **X** и **Y** или в виде вектора, соединяющего эту точку с началом координат. Если же значение частоты **ω** менять непрерывно от нуля до бесконечности, то вектор будет изменяться по величине и по направлению, описывая своим концом некоторую кривую (годограф), которая называется кривой Михайлова.

Оказывается, что кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения **n** (рисунок 5, а).

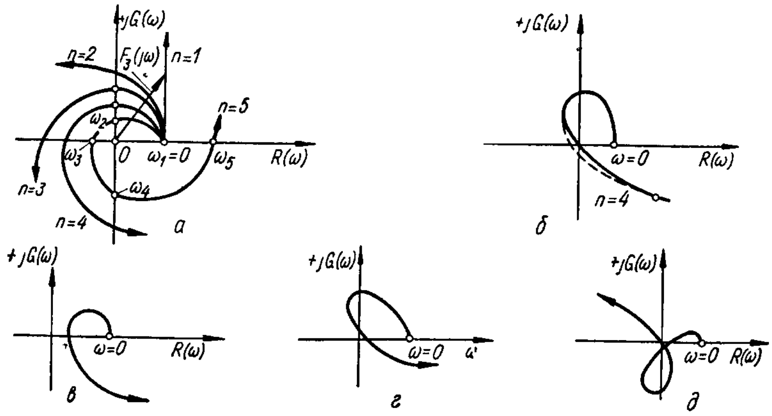

Рисунок 5 Годографы Михайлова:
а — устойчивых систем от 1-го до 5-го порядков;
б — системы, находящейся на границе устойчивости;
в÷д — неустойчивых систем

Критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать следующим образом: **система автоматического управления будет устойчива, если годограф Михайлова при изменении ω от 0 до +∞ последовательно пройдет n квадрантов против часовой стрелки, начиная от положительной вещественной оси, где n — степень характеристического уравнения замкнутой системы.**

Система, не удовлетворяющая этому условию, является неустойчивой.

Число квадрантов, большее чем $n\frac{\pi}{2}$, кривая Михайлова вообще не может пройти. Поэтому неустойчивость системы всегда связана с тем, что в кривой Михайлова нарушается последовательность прохождения квадрантов, вследствие чего угол поворота вектора **D(jω)** оказывается меньшим чем $n\frac{\pi}{2}$.

Построение годографа Михайлова

На практике для построения годографа Михайлова используют исходное выражение характеристического полинома замкнутой системы, в которой **p** заменяют на **jω**.

Практически кривая Михайлова строится по точкам, причем задаются различные значения частоты **ω** и по формулам (18) и (19) вычисляются **X(ω)** и **Y(ω)**. Результаты расчетов сводятся в таблицу, по которой и строится затем кривая.

При этом получается характеристический комплекс:

$$D(j\omega)=X(\omega)+jY(\omega)=D(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \qquad (17)$$

где вещественная часть будет содержать четные степени **ω**:

$$X(\omega)=a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-..., \quad (18)$$

а мнимая — нечетные степени ω:

$$Y(\omega)=a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-... \quad (19)$$

Пример

Построить годограф Михайлова для системы 3-го порядка, характеристический полином которой в замкнутом состоянии имеет вид:

$$D(p)=a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0.$$

Заменив p на $j\omega$, получим

$$D(j\omega)=a_0-a_2\omega^2+j\omega(a_1-a_3\omega^2)=X(\omega)+jY(\omega),$$

где $X(\omega)=a_0-a_2\omega^2$; $Y(\omega)=\omega(a_1-a_3\omega^2)$.

Определим частоты в точках пересечения годографом Михайлова вещественной оси из уравнения

$$Y(\omega)=\omega(a_1-a_3\omega^2)=0.$$

$$\omega_1=0; \quad \omega_3=\sqrt{\frac{a_1}{a_3}}.$$

Частоты в точках пересечения годографом мнимой оси определим из уравнения

$$X(\omega)=a_0-a_2\omega^2=0.$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}.$$

Отрицательные значения корней отбрасываем, т. к. берем изменение ω лишь от 0 до $+\infty$. Найденные значения ω_1 и ω_3 подставляем в выражение для $X(\omega)$, а ω_2 — в выражение для $Y(\omega)$, определяем точки пересечения годографа с осями координат и строим годограф.

Если окажется, что $\omega_1<\omega_2<\omega_3$, то система будет устойчива. Примерный вид годографа для этого случая изображен на рисунке 6.

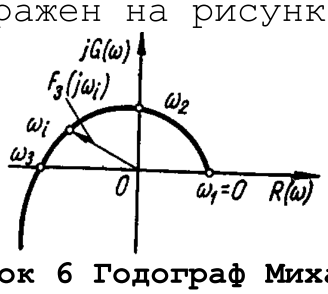

Рисунок 6 Годограф Михайлова устойчивой системы 3-го порядка

УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА — МИХАЙЛОВА

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости, первоначально разработанный в 1932 г. Найквистом для исследования усилителей с отрицательной обратной связью, в 1936 г. был обоснован, обобщен и впервые применен в теории автоматического управления А.В. Михайловым.

Критерий Найквиста — Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой системы **по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики системы в разомкнутом состоянии.** Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

Для первого случая критерий устойчивости формулируется следующим образом: **САР, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами (—1, j0).**

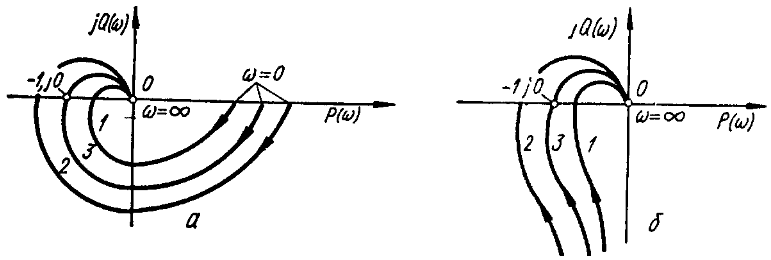

Рисунок 7 Амплитудно-фазовые частотные характеристики САР:
а — статических;
б — астатических (ν=1)

На рисунке 7 показаны амплитудно-фазовые частотные характеристики статических (а) и астатических (б) систем. Амплитудно-фазовые характеристики **1** не охватывают критическую точку, поэтому системы, имеющие эти характеристики, устойчивы. Амплитудно-фазовые частотные характеристики **2** охватывают точку **(—1, j0)**, поэтому системы **2** неустойчивы. Амплитудно-фазовые частотные характеристики **3** проходят через критическую точку; соответствующие системы находятся на границе устойчивости.

Рассмотрим доказательство критерия.

Если передаточная функция системы в разомкнутом состоянии $W(p)=\frac{b_m(p)}{c_n(p)}$, то передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p)=\frac{b_m(p)}{d_n(p)}.$$

Рассмотрим функцию $f(p)$

$$f(p)=\frac{W(p)}{\Phi(p)}=\frac{d_n(p)}{c_n(p)}, \qquad (20)$$

т. е. отношение характеристического полинома замкнутой системы к характеристическому полиному разомкнутой системы.

Числитель и знаменатель выражения (20) можно представить в виде сомножителей

$$f(p)=\frac{d_n(p)}{c_n(p)}=\frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)...(p-p_n)}{(p-p_1')(p-p_2')(p-p_3')...(p-p_n')},$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ — корни характеристического уравнения замкнутой системы;

$p_1', p_2', ..., p_n'$ — корни характеристического уравнения разомкнутой системы.

Подставляя $j\omega$ вместо p в последнее выражение, получим:

$$f(j\omega)=\frac{d_n(j\omega)}{c_n(j\omega)}=\frac{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)(j\omega-p_3)...(j\omega-p_n)}{(j\omega-p_1')(j\omega-p_2')(j\omega-p_3')...(j\omega-p_n')}.$$

При изменении ω от 0 до $+\infty$ каждый разностный вектор числителя и знаменателя поворачивается на $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, где лежит соответствующий корень.

Предположим, что разомкнутая система устойчива (устойчивость разомкнутой системы часто можно определить без всяких вычислений непосредственно по схеме системы; например, разомкнутая система, состоящая из устойчивых звеньев и не содержащая местных обратных связей, заведомо устойчива). В этом случае корни p_i находятся в левой полуплоскости и изменение аргумента $C(j\omega)$ (поворот характеристического вектора разомкнутой системы) при изменении ω от 0 до $+\infty$ равно

$$\Delta\arg C(j\omega)=n\frac{\pi}{2},$$

где n — степень характеристического уравнения разомкнутой системы $C(p)=0$.

Изменение аргумента $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ в общем случае равно

$$\Delta\arg D(j\omega)=(n-l)\frac{\pi}{2}-l\frac{\pi}{2}=(n-2l)\frac{\pi}{2},$$

где l — число корней в правой полуплоскости.

Изменение аргумента $f(j\omega)$ равно разности изменений аргумента числителя и знаменателя:

$$\Delta\arg f(j\omega)=\Delta\arg D(j\omega)-\Delta\arg C(j\omega)=(n-2l)\frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{2}=-l\pi.$$

Система будет устойчива, если $l=0$, т. е. если $\Delta\arg f(j\omega)=0$.

Вектор $f(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ опишет угол, равный нулю, лишь в том случае, если годограф этого вектора не охватывает начала координат (рисунок 7).

От годографа $f(j\omega)$ легко перейти к годографу $W(j\omega)$, т. е. к АФЧХ разомкнутой системы. Действительно, выражение для $f(j\omega)$ можем написать в следующем виде:

$$f(j\omega)=\frac{b_m(j\omega)+c_n(j\omega)}{c_n(j\omega)}1+W(j\omega),$$

где $W(j\omega)$ — АФЧХ разомкнутой системы. Геометрически последнее выражение иллюстрируется рисунком 8.

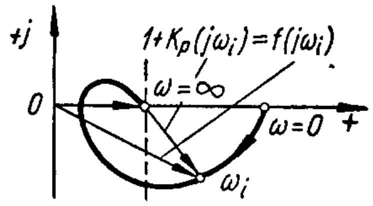

Рисунок 8 Годограф вектора $f(j\omega)$

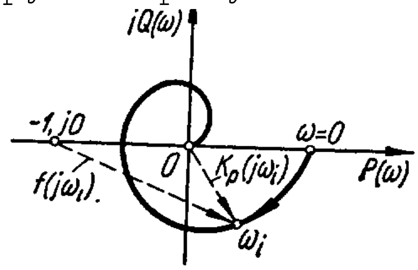

Рисунок 9 АФЧХ разомкнутой системы

Таким образом, годограф вектора $f(j\omega)$ представляет АФЧХ разомкнутой системы, но сдвинутую вправо на единицу. Поскольку удобнее пользоваться амплитудно-фазовой частотной характеристикой, а не годографом вектора $f(j\omega)$, перенесем ось ординат вправо на единицу, как показано на рисунке 9.

Изменение аргумента $f(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ будет равно нулю, если точка $(-1, j0)$ находится вне АФЧХ разомкнутой системы. Отсюда следует формулировка частотного случая критерия устойчивости Найквиста — Михайлова:

система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает критическую точку $(-1, j0)$.

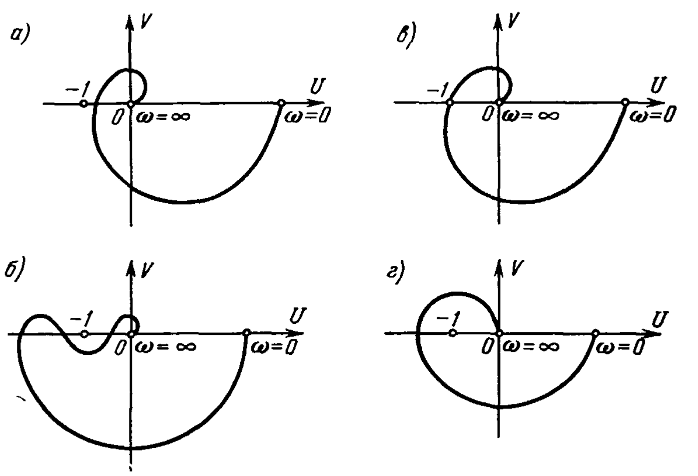

Рисунок 10 Годографы $W(j\omega)$ для различных систем

На рисунке 10, а изображен случай так называемой **абсолютно устойчивой** системы. Этот термин означает, что система остается устойчивой при любом уменьшении коэффициента усиления разомкнутой цепи. Напомним, что передаточная функция разомкнутой статической системы может быть представлена в виде:

$$W(p)=k\frac{B_m p^m+B_{m-1}p^{m-1}+...+B_1 p+1}{C_n p^n+C_{n-1}p^{n-1}+...+C_1 p+1}.$$

Нетрудно видеть, что уменьшение общего коэффициента усиления **k** приводит к уменьшению модуля **W(jω)**, а это в случае, изображенном на рисунке 10, а, не может привести к охвату годографом точки **(–1, j0)**.

На рисунке 10, б изображен случай так называемой **условно устойчивой системы.** Здесь система будет устойчивой при значениях общего коэффициента усиления, лежащем в некоторых пределах. Как увеличение, так и уменьшение общего коэффициента усиления **k** может привести к охвату годографом точки **(–1, j0)**, что будет соответствовать неустойчивости системы в замкнутом состоянии.

На рисунке 10, в изображен случай, когда система находится **на границе устойчивости.** Граница устойчивости будет колебательного типа. Это вытекает из того, что при некоторой частоте, при которой годограф пересекает точку **(–1, j0)**, имеет место равенство **W(jω)=–1+j0**, что может быть записано в виде

$$1+W(j\omega)=0.$$

Последнее выражение представляет собой характеристическое уравнение, которое обращается в нуль при подстановке **p=jω**. Таким образом, чисто мнимый корень является решением характеристического уравнения.

На рисунке 10, г изображен случай неустойчивой системы.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Построение годографа Михайлова, или амплитудно-фазовой частотной характеристики сложных систем, в целью исследования их устойчивости требует большой затраты времени. Исследование устойчивости САР существенно упрощается при применении логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ). Простота и наглядность метода ЛЧХ объясняются простотой построения логарифмических частотных характеристик и очевидной связью параметров системы с видом этих характеристик.

Применение метода ЛЧХ дает возможность видеть влияние того или иного параметра системы на ее устойчивость и переходный процесс, а также позволяет сравнительно просто определить характеристику корректирующего устройства, обеспечивающего требуемые показатели качества системы.

Логарифмический частотный критерий устойчивости основывается на амплитудно-фазовом критерии устойчивости и представляет по существу, иную, более удобную формулировку амплитудно-фазового критерия устойчивости при пользовании ЛЧХ. Рассмотрим только случай, когда САР в разомкнутом состоянии устойчива. Вначале выясним критерий устойчивости для САР первого рода, имеющих наиболее простые по форме частотные характеристики.

На рисунке 11, а изображены АФЧХ разомкнутых систем, отличающихся лишь коэффициентами усиления $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}_2 > \mathbf{k}_1$). Из них АФЧХ **1**, согласно амплитудно-фазовому критерию устойчивости, соответствует устойчивой, АФЧХ **2** — неустойчивой системе в замкнутом состоянии.

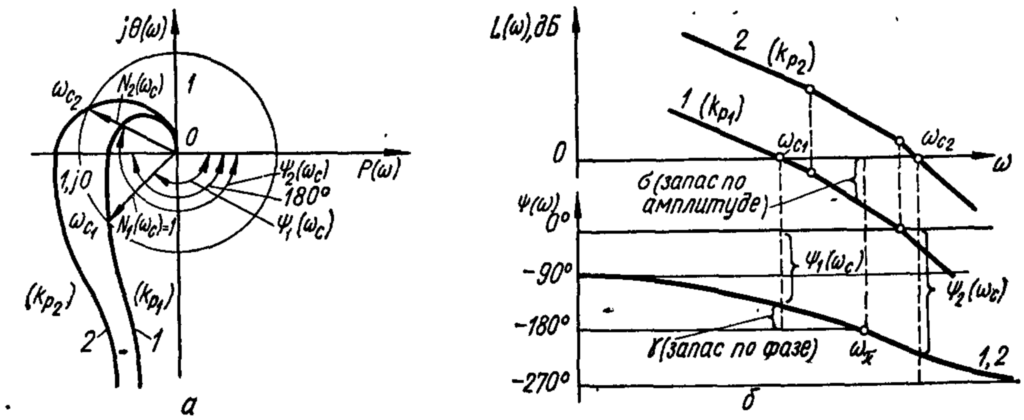

Рисунок 11 Частотные характеристики систем, отличающихся коэффициентом усиления: а — АФЧХ; б — ЛЧХ.

На рисунке 11, б приведены ЛЧХ, соответствующие АФЧХ, изображенным на рисунке 11, а. Поскольку системы отличаются лишь коэффициентом усиления $\mathbf{k}$, то их ЛФЧХ совпадают, а ЛАХ **2** системы, имеющей $\mathbf{k}_2 > \mathbf{k}_1$, располагается выше, чем ЛАХ **1** системы с $\mathbf{k}_1$.

Из рисунке 11, а видно, что устойчивость системы обеспечивается, если аргумент $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\omega}_{ср})$ АФЧХ системы при частоте среза $\boldsymbol{\omega}_{ср}$ по абсолютной величине меньше, чем **180°.**

Применительно к ЛЧХ это условие устойчивости можно сформулировать следующим образом: **система автоматического**

управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если ордината логарифмической фазо-частотной характеристики (аргумент АФЧХ) на частоте среза $\omega_{ср}$ системы по абсолютной величине меньше, чем 180°, т. е. если $|\psi(\omega_{ср})|<180°$.

Система, имеющая ЛАХ **1** (рисунок 11, б), устойчива, поскольку $|\psi_1(\omega_{ср})|<180°$, а система с ЛАХ **2** неустойчива, так как $|\psi(\omega_{ср})|>180°$.

Система находится на границе устойчивости, если ее АФЧХ в разомкнутом состоянии проходит через точку в координатами **(–1, j0)**, т. е. если на частоте ω_π, на которой система вносит запаздывание $\psi_1(\omega_\pi)=-180°$, модуль $A(\omega_\pi)$ частотной передаточной функции равен **1**. Поскольку **20lg1=0**, то система будет находиться на границе устойчивости, если на частоте ω_π ЛАХ будет пересекать ось **0 дБ**, т. е. если $\omega_{ср}=\omega_\pi$. ЛЧХ системы, находящейся на границе устойчивости, изображены на рисунке 12, ЛАХ системы изображена ломаной $L_{гр}$. На этом же рисунке ломаной $L_{уст}$ изображена ЛАХ устойчивой системы.

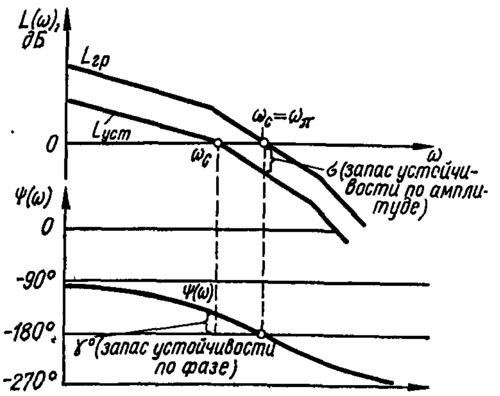

Рисунок 12 К определению запаса устойчивости по амплитуде и фазе

Запас устойчивости по амплитуде **h** [дБ] определяется как число децибел, на которое нужно увеличить усиление системы, чтобы система достигла границы устойчивости.

Запас устойчивости по фазе γ определяется как разность между **180°** и абсолютным значением аргумента АФЧХ при частоте среза $\omega_{ср}$, т. е.:

$$\gamma=180°-|\psi(\omega_{ср})|.$$

Определение запаса устойчивости по амплитуде и по фазе показано на рисунке 12.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

2.1 Расчетная часть

Функциональная схема исследуемой системы стабилизации скорости вращения электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением показана на рисунке 13.

В системах электропривода из многих координат (напряжение преобразователя, ток двигателя, его момент, скорость, скорость или перемещение рабочего органа) обычно одна является основной регулируемой координатой, по которой осуществляется главная обратная связь. При использовании тиристорных или других быстродействующих преобразователей структура силовой части электропривода оказывается достаточно простой, что позволяет легко осуществить коррекцию контура. Однако при этом часто оказывается необходимым ограничить пределы изменений одной или нескольких промежуточных координат (например тока двигателя, его скорость при отработке перемещений и т. п.). С этой целью система дополняется дополнительными обратными связями по указанным координатам.

Рассматриваемая система является двухконтурной и **построена** она **по принципу подчиненного регулирования,** который поясняется рисунком 13. В системе предусмотрены два контура регулирования: скорости и тока со своими регуляторами **РС** и **РТ**, причем выходное напряжение регулятора внешнего контура скорости $\mathbf{U_{pc}}$ является предписанным для внутреннего контура тока. Выходное напряжение регулятора тока $\mathbf{U_{PT}}$ является управляющим для тиристорного преобразователя **ТП.** Регуляторы предназначены для придания определенных динамических свойств контурам регулирования.

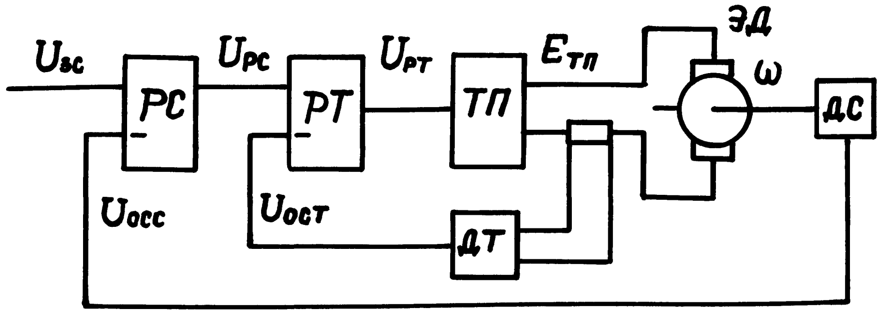

Рисунок 13 Функциональная схема системы тиристорный преобразователь – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

На рисунке 13 введены следующие обозначения элементов системы электропривода:

РС - регулятор скорости;

РТ - регулятор тока;

ТП - тиристорный преобразователь;

ДТ - датчик тока;

ДС - датчик скорости;

ЭД – электродвигатель.

Сигналы в функциональной схеме:

$\mathbf{U_{зс}}$ - напряжение задания скорости;

$\mathbf{U_{осс}}$ - напряжение отрицательной обратной связи по скорости;

$\mathbf{U_{рс}}$ - напряжение на выходе регулятора скорости;

$\mathbf{U_{ост}}$ - напряжение отрицательной обратной связи по току;

$\mathbf{U_{рт}=U_{упр}}$ - напряжение на выходе регулятора тока (напряжение управления на входе СИФУ тиристорного преобразователя);

$\mathbf{E_{тп}}$ - ЭДС на выходе тиристорного преобразователя;

$\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость вращения электродвигателя **ЭД.**

Математическое описание элементов системы ЭП

2.1.1 Математическое описание электродвигателя

При математическом описании двигателя постоянного тока с независимым возбуждением принимаются следующие допущения:

а) считается скомпенсированным размагничивающее действие реакции якоря;

б) параметры двигателя считаются неизменными;

в) пренебрегается влиянием вихревых токов в массивных частях магнитной системы двигателя;

г) магнитный поток считается постоянным.

Линеаризованная математическая модель двигателя постоянного тока с независимым возбуждением описывается системой дифференциальных уравнений в операторной форме:

$$E_{тп}(p)-E(p)=R_{яц}\cdot I_{я}(p)+L_{яц}\cdot p\cdot I_{я}(p),$$

$$E(p)=C\cdot\Omega(p);$$

$$M_{эм}(p)=C\cdot I_{я}(p);$$

$$M_{эм}(p)-M_{c}(p)=J_{пр}\cdot p\cdot\Omega(p),$$

где $E_{тп}(p)$ - изображение ЭДС тиристорного преобразователя;

$E(p)$ - изображение противо-ЭДС электродвигателя;

$I_я(p)$ - изображение тока якоря;

$\Omega(p)$ - изображение скорости электродвигателя;

$M_{эм}(p)$ - изображение момента электродвигателя,

$M_c(p)$ - изображение момента сил статических сопротивлений;

$R_{яц}$ - суммарное сопротивление якорной цепи;

$L_{яц}$ - суммарная индуктивность якорной цепи;

$J_{пр}$ - суммарный момент инерции привода, приведенный к валу электродвигателя;

C - конструктивный коэффициент электродвигателя.

Указанным уравнениям соответствуют динамические звенья, описываемые передаточными функциями:

а) якорная цепь электродвигателя:

$$W_{яц}(p)=\frac{I_я(p)}{E_{тп}(p)-E(p)}=\frac{1}{R_{яц}+p\cdot L_{яц}}=\frac{\frac{1}{R_{яц}}}{1+\frac{L_{яц}}{R_{яц}}\cdot p}=\frac{\frac{1}{R_{яц}}}{1+T_{яц}\cdot p};$$

где $T_{яц}$ – суммарная постоянная времени цепи якоря.

б) электромагнитная часть двигателя:

$$W_{эмч}(p)=\frac{M_{эм}(p)}{I_я(p)}=C;$$

в) механическая часть электродвигателя:

$$W_{мч}(p)=\frac{\Omega(p)}{M_{эм}(p)-M_c(p)}=\frac{1}{J_{пр}};$$

г) внутренняя обратная связь по ЭДС двигателя:

$$W_{эдс}(p)=\frac{E(p)}{\Omega(p)}=C.$$

На основе системы уравнений, электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением можно представить следующей структурной схемой

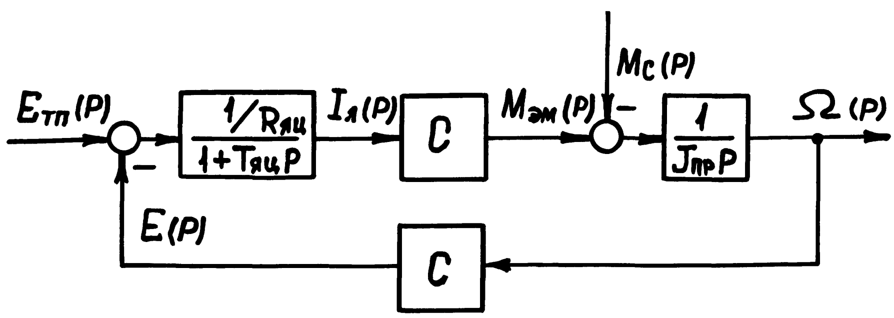

Рисунок 14 Структурная схема электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением

2.1.2 Математическое описание тиристорного преобразователя

Тиристорный преобразователь в зависимости от возможности реверса, типа управления группами вентилей, режима работы при исследовании описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Его динамика, как элемента системы управления отличается следующими особенностями:

а) преобразователь управляется не непрерывно, а дискретно;

б) преобразователь является полууправляемым устройством, поскольку тиристор открывается в момент подачи управляющего импульса, а закрывается - когда ток через него станет равен нулю.

При учете преобразователя вводятся следующие допущения:

а) преобразователь имеет линейную зависимость $E_{тп}=f(U_{упр})$;

б) преобразователь работает только в зоне непрерывного тока.

Однако в целом тиристорный преобразователь, работающий в режиме непрерывного тока, с достаточной точностью можно представить одним динамическим звеном - инерционным звеном первого порядка (апериодическим звеном):

$$W_{тп}(p)=\frac{E_{тп}(p)}{U_{упр}(p)}=\frac{k_{тп}}{1+T_{тп}\cdot p},$$

где $T_{тп}$ - постоянная времени тиристорного преобразователя;

$k_{тп}$ - коэффициент передачи тиристорного преобразователя.

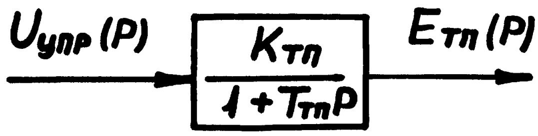

Рисунок 15 Структурная схема тиристорного преобразователя

2.1.3 Математическое описание регуляторов

Передаточная функция пропорционально-интегрального регулятора имеет вид:

$$W_{рег}(p)=k_{п}+\frac{1}{T_{и}\cdot p},$$

где $k_{п}$ - коэффициент передачи пропорциональной части,

$T_и$ - постоянная времени интегрирующей части регулятора, [с].

Детализированная структурная схема пропорционально-интегрального регулятора показана на рисунке 16.

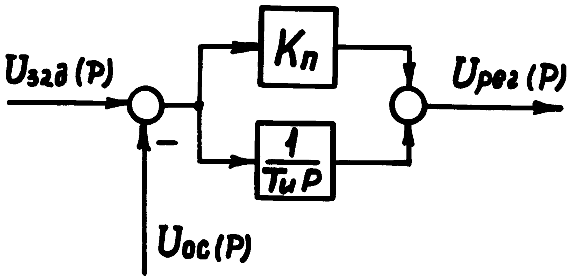

Рисунок 16 Детализированная структурная схема пропорционально-интегрального регулятора

2.1.4 Математическое описание датчиков обратных связей

Датчики обратных связей по току и скорости с приемлемой точностью при расчета могут рассматриваться как безынерционные динамические звенья с коэффициентами $\mathbf{k_{дт}}$ и $\mathbf{k_{дс}}$, соответственно.

3 Порядок выполнения работы

3.1 Составить структурную схему электропривода, используя структурные схемы составляющих ее элементов.

3.2 Согласно заданному таблицей 2 варианту исходных данных определить передаточные функции:

- разомкнутой системы;
- замкнутой системы.

Таблица 2

№ варианта – последняя цифра номера по списку группы										
N варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Rяц, Ом	1,95	4,234	2,471	1,7	1,462	1,036	1,024	1,046	0,846	0,622
Тяц, с	0,018	0,012	0,011	0,011	0,012	0,016	0,02	0,022	0,025	0,031
С, В*с	1,334	1,89	1,261	0,63	0,634	0,641	1,838	3,011	3,369	3,169
Jпр, кг*м*кв	0,066	0,057	0,07	0,053	0,061	0,071	0,34	0,78	1,4	2,1
Ктп	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25	34,25
Ттп, с	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Кдт, В/А	0,588	0,694	0,391	0,272	0,227	0,167	0,115	0,106	0,075	0,058
Кдс, В*с/рад	0,064	0,095	0,064	0,032	0,032	0,032	0,095	0,159	0,18	0,165
Кп рт	0,086	0,106	0,103	0,101	0,115	0,148	0,255	0,321	0,415	0,482
Ти рт, с	0,207	0,112	0,108	0,105	0,107	0,110	0,077	0,069	0,061	0,064
Кп рс	11,43	5,481	8,519	17,95	17,18	14,5	5,553	4,301	4,355	5,877
Ти рс, с	0,007	0,146	0,009	0,005	0,005	0,006	0,014	0,019	0,018	0,064

3.3 Определить устойчивость системы электропривода по методу, заданному таблицей 3.

Таблица 3

Первая буква фамилии студента			
А-Ж	**З-М**	**Н-С**	**Т-Я**
Устойчивость по критерию **Гурвица**	Устойчивость по критерию **Михайлова**	Устойчивость по критерию **Найквиста**	Устойчивость по **ЛАЧХ**

4 Содержание отчета

1. Структурная схема с заданными параметрами.

2. Расчет передаточных функций и характеристического полинома.

3. Построенные **D(jω)**, **W(jω)**, **L(ω)** и **ψ(ω)** (в соответствии с вариантом задания).

4. Расчет или графическое определение частоты среза системы $\omega_{ср}$;

5. Общие выводы об устойчивости системы.

5 Контрольные вопросы

1.Как определяются экспериментально и теоретически запасы устойчивости по фазе и по модулю? Их физический смысл?

2. Как влияет на устойчивость системы коэффициент передачи и почему?

3. Какой коэффициент усиления разомкнутой системы называют критическим и почему?

4. Как определить критический коэффициент усиления системы, используя критерий Гурвица? Михайлова? Найквиста? Логарифмический? Экспериментально?

Литература

1 Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал)ю –М.: Машиностроение, 1982. –504 с.

2 Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ: Учебное пособие для вузов.-3-е изд. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1990. -512 с.

3 Башарин А.В., Новииков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. -Л. Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. -392 с.

4 Горбацевич Е.Д., Левинзон Ф.Ф. Аналоговое моделирование систем управления. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. -304 с.